Introducción al álgebra mediante su uso: Una alternativa factible mediante calculadoras programables

Afortunadamente no nos enseñaron a hablar en la forma en que enseñamos matemáticas.

Resumen

Se reportan, en un primer nivel de análisis, los resultados de una investigación sobre el potencial de cierto tipo de calculadoras programables[1] como medios para introducir el aprendizaje del álgebra. La fase principal de este estudio se llevó a cabo durante 18 sesiones de 50 minutos, con un grupo de 23 alumnos (12-13 años de edad) que cursan el primer año de secundaria.[2] Esta investigación proporcionó evidencia empírica que muestra que el trabajo con las calculadoras, propició que los alumnos desarrollaran nociones y habilidades que les permitieron usar el código algebraico como recurso para resolver problemas, así como para expresar y justificar generalizaciones. En el artículo se abordan los logros de los alumnos a la luz de la perspectiva teórica en que se enmarca este estudio.

Introducción

En forma resumida, podríamos decir que el propósito mayor de los cursos de álgebra es que los estudiantes se apropien de sus contenidos, y los usen como herramienta para justificar generalizaciones y resolver problemas. Desafortunadamente es en estos usos del álgebra donde encontramos que los estudiantes muestran un desempeño más bajo. En este artículo se abordan algunos de estos problemas desde la perspectiva de la enseñanza; en particular, nuestro estudio ofrece una alternativa al enfoque de enseñanza caracterizado por el principio de introducir el álgebra a partir de algunas definiciones y reglas, y de ahí, derivar los usos del código algebraico.

Tenoch E. Cedillo Avalos
Universidad Pedagógica Nacional, México

[1] Calculadoras gráficas que disponen de un código de programación similar al código algebraico.

[2] El trabajo de campo de esta investigación no hubiera sido posible sin la colaboración que ofreció el Centro Escolar Hermanos Revueltas, Coyoacán, D.F., México.

La discusión que aquí planteamos se basa en una investigación que realizamos recientemente sobre el potencial de las calculadoras gráficas como apoyo en la enseñanza del álgebra. Los resultados obtenidos conducen a proponer que los recursos que ofrecen esas máquinas permiten abordar el estudio del álgebra a partir de su uso y, además, que tal uso del código algebraico promueve que los estudiantes generen significados para ese lenguaje simbólico que les permite emplearlo a fin de abordar la solución de problemas, y expresar y justificar generalizaciones.

Parece paradójico proponerse empezar a usar algo antes de contar con un mínimo de definiciones acerca de ello. Sin embargo, tenemos a la mano un buen ejemplo: el aprendizaje del lenguaje materno, el cual no está precedido por el establecimiento de reglas ni definiciones. Acerca de este punto creemos conveniente señalar que se toma en cuenta que hay grandes diferencias entre el lenguaje natural y el algebraico [a este respecto Freudenthal (1983) realizó un excelente análisis]. Lo que aprovechamos de las indagaciones y la teoría existente sobre la adquisición del lenguaje materno, son los resultados obtenidos por Bruner (1983), del que tomamos su concepto de *Sistema de apoyo para la adquisición del lenguaje*, a fin de diseñar un ambiente de aprendizaje en el que el código algebraico es puesto en el contexto de la comunicación. Realmente este punto es nuestro objeto de atención en el resto de este escrito.

La investigación se desarrolló en torno a la siguiente conjetura:

> **Los artefactos computacionales que utilizan como código de programación un lenguaje simbólico semejante al algebraico, pueden emplearse para crear un ambiente matemático que favorezca el aprendizaje del sistema de signos del álgebra a partir de su uso, sin que se requiera un conocimiento previo de su estructura y reglas sintácticas, de manera similar a la forma en que aprendemos el lenguaje materno (Cedillo, T., 1992, 1994).**

El propósito central fue obtener elementos para dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Es factible introducir el estudio del álgebra a partir del uso del código algebraico?
- ¿Qué significados generan los estudiantes para el código algebraico cuando lo abordan a partir de su uso?
- ¿En qué medida, y de qué manera, el uso de la calculadora propicia que los alumnos se apropien del código algebraico como medio para expresar y justificar generalizaciones, así como plantear y resolver problemas?
- ¿El bagaje aritmético que poseen los alumnos les proporciona puntos de apoyo para enfrentar la estructura formal del código algebraico?

Este artículo se desarrolla en tres secciones. En la primera, se trata lo referente a la perspectiva teórica; en la segunda se abordan aspectos de orden metodológico y, por último, discutimos algunos resultados que consideramos relevantes y se plantean algunas reflexiones acerca de las implicaciones hacia la enseñanza que se derivan de este estudio.

Perspectiva teórica

Relación entre el uso de la calculadora y la adquisición del lenguaje natural.

Iniciaremos este apartado exponiendo los aspectos de orden matemático que nos llevan a relacionar el aprendizaje del álgebra con el referente teórico desarrollado por Bruner. Como veremos, está relación está determinada por el modo en que opera el tipo de calculadora que utilizamos y con la concepción de aprendizaje que se asume.

Las calculadoras que se utilizan ofrecen dos formas de representación para relaciones funcionales:[3] la expresión analítica, mediante la que se escribe un programa (Figura 1); y la representación tabular, la cual se obtiene en la pantalla de la calculadora al correr un programa para varios valores de la variable (Figura 2). Se emplea la representación tabular como un referente semántico de las expresiones analíticas. Explotamos estas características de operación de la máquina para crear un ambiente de trabajo matemático inmerso en el contexto de la comunicación, en el cual el código formal de la calculadora está listo para usarse por alguien que posea elementos básicos de aritmética. Ese ambiente está conformado como sigue:

Figura 1

$? \rightarrow A$:	$2 \times A + 5$
Declaración de variables	Expresión de programación

Figura 2
Pantalla que se genera al correr el programa para varios valores de A.

1	
	7
3	
	11
6	
	17
7	
	19

- Hay un profesor que desempeña el papel de usuario experto del lenguaje de la calculadora. Se supone que su dominio sobre el lenguaje le permite modular la forma en que éste se usa de manera que se sintonice con las posibilidades de los que lo van a aprender.
- Hay un grupo de niños que cuentan cada uno con una calculadora; ésta juega el papel de "herramienta" que les proporciona un medio para expresar procedimientos aritméticos mediante expresiones en un nuevo sistema de signos.
- Se cuenta con actividades previamente diseñadas que conducen al alumno a usar el lenguaje de la calculadora. Los estudiantes emplean ese código para lograr que la

[3] Sólo empleamos el área de programación para declarar la regla de correspondencia de funciones lineales y no acudimos a otros recursos de la programación estructurada ni a la representación gráfica.

calculadora realice lo que ellos necesitan, o puesto en otros términos, al emplear la modalidad de programación de la calculadora, el usuario está en la posibilidad de lograr la consecución de sus fines "mediante el uso de palabras" que la calculadora "entiende".

El trabajo se inicia mostrando a los alumnos cómo se redacta un programa en la calculadora y qué es lo que el programa produce cuando se corre. La actividad se introduce como un juego que consiste en "adivinar el programa" que otro hizo (Rojano, T. & Sutherland, R., 1993); los alumnos deben identificar el patrón numérico que se muestra en una tabla y programar la calculadora para que reproduzca la tabla dada. La estructura de la actividad está dada por el juego mismo; las reglas del mismo y sus fines están contenidos en él.

Resumiendo, las actividades se centran en el aprendizaje de un código que permite expresar relaciones numéricas y efectuar cálculos con ellas. La interacción se da en dos niveles: estudiante —máquina y estudiante—, profesor. La hipótesis que aquí se plantea es que los alumnos, *mediante el uso* del lenguaje de la calculadora, generarán significados para tal sistema de signos, emulando de alguna manera el proceso mediante el que adquirimos los rudimentos del lenguaje materno.

Al realizar esas actividades los niños están usando el código de programación como el lenguaje que la calculadora "entiende". La aritmética desempeña la función de referente semántico que los orienta en el planteamiento y verificación de conjeturas que expresan mediante el lenguaje de la calculadora. Con esas actividades se intenta crear un ambiente de trabajo en el que el lenguaje está tan fuertemente ligado al contexto, que la corrección de su empleo puede ser verificada constantemente mediante el contexto mismo. Esta estrecha relación entre contexto y forma (tablas-expresiones analíticas) está en consonancia con una característica fundamental del aprendizaje de la lengua materna, donde, —para el que la está aprendiendo—, sería prácticamente imposible manejar las formas lingüísticas sin apoyarse en el contexto.

El planteamiento teórico de J. Bruner

Intentaremos describir sucintamente aquellas partes del trabajo de Bruner (1983) que nos permitan ver cómo lo relacionamos con esta investigación. Los procesos que median la adquisición del lenguaje y su relación con el aprendizaje, se han estudiado extensamente.[4] Sin embargo, hay aún un buen número de cuestiones que son objeto de debate por ejemplo: ¿por qué cualquier persona normal aprende, al menos, los rudimentos del lenguaje materno que le permiten comunicarse en su comunidad? ¿Qué es lo que da esta singular característica al aprendizaje del lenguaje natural que lo distingue tan radicalmente del de otras formas de conocimiento?

Con el propósito de aproximarnos al objeto de esta discusión analicemos la siguiente cuestión: ¿Qué quiere decirse cuando afirmamos que *un niño está adquiriendo el lenguaje*? Al menos hay tres formas en que puede entenderse eso:

- Interpretarlo en términos de su capacidad para emitir expresiones correctas respecto a las reglas gramaticales.

---

[4] Véase, por ejemplo, Vygotsky, 1986. Una disertación importante desde una perspectiva distinta a la de Vygotsky se encuentra en Piattelli-Palamarini (eds.), 1980.

- Otra posible interpretación es con relación a su capacidad para referirse mediante el lenguaje a hechos o a cosas no presentes; aquí debemos notar que es posible construir expresiones sintácticamente correctas pero "carentes de significado"; no es nada claro que cualquier expresión tenga algún significado independientemente del contexto y de las condiciones en que es emitida. Por ejemplo, consideremos el caso de expresiones de una sola palabra, la expresión *fuego,* ¿es una señal de alarma, o una referencia metafórica, o bien la petición de una flama para encender algo? (Bruner, 1983, p. 18).
- Otra forma de entender lo que queremos decir con la expresión *un niño está adquiriendo el lenguaje* es pensar en su competencia comunicativa, en su capacidad para hacer cosas mediante palabras. Aquí, los criterios para juzgar su progreso no pueden ser sólo la corrección sintáctica de sus expresiones, ni su capacidad para referir hechos mediante el lenguaje, sino que debe involucrarse algo más, algo que está relacionado con su competencia lingüística. Por ejemplo, su capacidad para invocar, reclamar, insultar, prometer, o mostrar respeto, mediante el uso de palabras (Bruner, J., 1982).

Esas tres interpretaciones a la pregunta que nos hemos planteado caracterizan respectivamente tres facetas del lenguaje: *sintaxis, semántica y pragmática*. Como puede apreciarse en el curso de la vida real, esas tres facetas no pueden aprenderse de manera independiente. La investigación de Bruner está orientada por la pragmática, la cual trata con procesos muy diferentes a aquéllos involucrados en el dominio de un conjunto de códigos sintácticos o semánticos. La pragmática consiste en el estudio de *cómo se usa* el discurso para *lograr* fines sociales. Bajo esta perspectiva los elementos del discurso "no están *representando algo*, *sino que son* ese *algo*" (Bruner, 1982, p. 7).

Un aspecto fundamental de la pragmática es la interacción, a la que se considera la fuente productora de claves para codificar el discurso. A este respecto, Bruner (1983), con base en sus hallazgos, asigna una función primordial al papel que juega el adulto; es él quien arregla el medio ambiente y sus encuentros con el niño, de manera que la introducción del lenguaje se sintonice con la forma de proceder del niño. Bruner llama *Sistema de Apoyo para la Adquisición del Lenguaje* a este modo de arreglar el ambiente; su investigación lo condujo a plantear la hipótesis de que el niño adquiere las claves que le permiten comprender el lenguaje, a través de su participación en relaciones sociales que le muestran los distintos usos de ése en el discurso.

Una de las aportaciones cruciales de la investigación de Bruner consiste en que el lenguaje natural es algo que se enseña,[5] que su aprendizaje empieza *antes* que el niño pueda emitir alguna expresión lingüística, y que se da en gran parte alrededor de la acción, en especial en torno a la realización de juegos con su madre. En éstos se establece lo que Bruner llama *formatos*. Un formato es un microcosmos regido por reglas sencillas y evidentes que preparan el escenario en el que el adulto y el niño hacen algo juntos. La investigación de Bruner muestra que tales formatos son el principal vehículo en la transición de la comunicación pre-lingüística al lenguaje, y en ellos se delimita la interacción comunicativa antes que se inicie el discurso léxico-gramatical. Los resultados de

[5] Esto contrasta con la opinión de Piaget, en donde el lenguaje es visto más bien como un síntoma del desarrollo intelectual, o con la opinión de San Agustín, en la que se considera que el aprendizaje de la lengua materna se da por simple imitación.

Bruner (1983) sugieren que esos formatos "migran de los contextos en que se originaron y son generalizados para emplearse en nuevas actividades y situaciones" (pág. 121).

La forma en que se introdujo en este trabajo el código algebraico mediante el uso de las calculadoras fue delimitada por estos planteamientos teóricos; los detalles de la instrumentación del estudio se presentan en la siguiente sección.

Aspectos metodológicos

Escenario

El trabajo de campo se realizó con un grupo escolar de 23 niños de 11-12 años de edad que no habían recibido instrucción sobre álgebra. El investigador desempeñó el papel del profesor de matemáticas durante todo el año escolar, asumiendo el compromiso de cubrir el programa oficial; esto permitió controlar el tipo de experiencias que tuvieron los alumnos en la escuela antes y durante el trabajo de campo. Con la finalidad de que los alumnos se familiarizaran con el teclado de la máquina y sus funciones, se proporcionó a cada estudiante una calculadora desde el inicio del curso, para que la utilizaran en las clases cada vez que lo consideraran necesario. El uso del modo de programación se reservó para el periodo experimental, el cual se llevó a cabo tres meses después del inicio de clases, y tuvo una duración de 18 sesiones de 50 minutos cada una.

Las actividades se presentaron en hojas de trabajo (55 en total) con el propósito de delimitar la intervención expositiva del maestro y de respetar el ritmo de avance de cada niño. Las hojas de trabajo se organizaron en seis paquetes, a los que llamamos *formatos*; al inicio de la clase se entregaba a cada niño un sobre que contenía las hojas correspondientes a un formato sin que se estableciera cuántas hojas deberían completarse, y ellos las devolvían al término de la clase. En la siguiente clase cada niño recogía su sobre, en el que encontraba, revisadas por el profesor, las hojas que había hecho y las que le faltaba concluir. Este proceso de revisión constituyó una forma importante de interacción, la cual proporcionaba al alumno un interlocutor que, dado el caso, podía entender sus expresiones no ortodoxas y le daba orientaciones que podían ayudarle a comprender por qué ésas no funcionaban en el lenguaje formal de la calculadora. La revisión del trabajo de los alumnos se orientó por el principio de no pasar por alto ningún error, y dar orientaciones únicamente a través de nuevas preguntas que hicieran evidentes los errores. Asimismo, esta revisión del trabajo aportó en todo momento del estudio un panorama actualizado del avance de cada estudiante.

Sujetos

Se eligieron ocho alumnos para ser observados como estudios de caso durante la etapa experimental; el criterio de selección fue su desempeño en la clase de matemáticas durante los primeros tres meses de trabajo. La elección se llevó a cabo como sigue: (i) un niño y una niña con desempeño por abajo del promedio; (ii) dos niños y dos niñas con desempeño promedio y, (iii) un niño y una niña con desempeño por arriba del promedio.

Actividades

Figura 3

?	
2	
	5
?	
5	
	11
?	
9	
	19

El uso del código de programación de la calculadora fue el factor que determinó los contenidos de las actividades, y la secuencia fue definida por el concepto de formato desarrollado por Bruner. Las actividades se organizaron en seis grupos llamados *formatos*. El Formato 1 contiene la "materia prima" sobre la que se elabora con mayor profundidad en los formatos 2 al 6. En el Formato 1 (15 hojas de trabajo) se introduce el uso de expresiones que contienen letras como el lenguaje matemático que les permite controlar la calculadora para que ésta haga lo que se quiere. Por ejemplo, al correr el programa $2 \times A + 1$ para $A = 2, 5, 9$, se produce la tabla que se muestra en la Figura 3.[6] La actividad se presenta como un juego que consiste en lo siguiente: Dada una tabla (que simula la pantalla de la calculadora), se pide a los niños que:

- Encuentren las operaciones que efectúa la calculadora sobre el número de entrada para producir el número de salida y que expresen eso de alguna manera.
- Programen la calculadora de manera que produzca una tabla igual a la de la hoja.
- Completen usando ese programa otra tabla dada en la hoja de trabajo.

Esta especie de juego configuró la plataforma de comunicación sobre la que se diseñaron actividades cada vez más complejas. Mediante ese juego se introdujo el lenguaje de la calculadora y en cada hoja de trabajo se incluía algún nuevo elemento, ya sea de carácter numérico, incorporando decimales o números con signo, o bien de carácter estructural, como reglas de correspondencia de "dos pasos", por ejemplo, la regla $3 \times D$ es de "un paso" y $3 \times D + 1$ es de "dos pasos". Todas las tablas propuestas fueron generadas por funciones lineales. En el siguiente cuadro (Fig. 4) se describe la secuencia en que se presentaron las demás actividades y los contenidos de cada paquete.

Formato 2 (5 hojas)	Se pide que inventen actividades como las que se les presentaron en el formato 1. El propósito es que los alumnos prevean un programa antes de visualizar un patrón numérico y que empiecen a usar el lenguaje de la calculadora para lograr sus propios fines.
Formato 3 (10 hojas)	Equivalencia: Dada una tabla, se pide encontrar dos o más programas que la reproduzcan
Formato 4 (10 hojas)	Inversión: Dada una tabla, se pide encontrar tanto el programa que la produce como el programa inverso (en el sentido de inversión de funciones). También se pide invertir un programa a partir de su expresión analítica.
Formato 5 (5 hojas)	Se proponen tablas que corresponden a funciones de la forma $f(x) = b - ax$.
Formato 6 (10 hojas)	Problemas convencionales: Se inicia con la identificación de patrones numéricos descritos mediante modelos geométricos (sucesiones) y se avanza hacia la resolución de problemas verbales que implican generalización.

6 Aunque el código de la calculadora admite expresiones como $2A + 1$, se respetó durante todo el estudio la notación aritmética que ya conocían los alumnos

Recolección de datos

Se entrevistó en cuatro ocasiones a cada uno de los ocho alumnos seleccionados, una vez justo antes de la fase experimental del estudio; dos veces durante el estudio, y una vez al término. Cada entrevista fue videograbada. Otras fuentes de datos fueron el trabajo que cada estudiante realizó durante las sesiones en el salón de clases, las notas que el investigador tomó al término de cada una, y un cuestionario de respuestas abiertas que se aplicó al final del estudio. Uno de los propósitos de tal cuestionario fue observar las respuestas de los alumnos que no fueron entrevistados, a cuestiones que sólo se abordaron en entrevistas. Además, también se aprovechó para incluir preguntas que complementaron la información obtenida de las entrevistas, en particular acerca de la forma en que los alumnos podían interpretar expresiones algebraicas totalmente nuevas para ellos, como ecuaciones de primer grado que contienen paréntesis, barras de división y la incógnita en ambos miembros.

Categorías de análisis

El desempeño de los estudiantes se observó de acuerdo con las siguientes categorías:

- **Sintaxis:** cómo llegan los alumnos a emitir expresiones que satisfacen las reglas sintácticas del lenguaje algebraico.
- **Semántica:** cómo llegan los alumnos a asignar significados al lenguaje de la calculadora y cuál es la naturaleza de tales significados.
- **Pragmática:** cómo usan los alumnos el lenguaje de la calculadora para enfrentar la resolución de problemas, y para explorar y justificar generalizaciones.

Resultados

El análisis de los datos está en proceso aún, por lo que sólo abordaremos lo que se considera relevante hasta este momento en relación con datos obtenidos a través de entrevistas.

Sintaxis

Uso de paréntesis y prioridad de las operaciones

A este respecto cabe destacar el papel que desempeñó la calculadora como instrumento mediacional en el aprendizaje (en el sentido de Vygotsky, 1978; Wertsch, 1991). El trabajo con la calculadora propició que el uso de paréntesis y la prioridad de las operaciones se aceptaran como *convenciones* necesarias para expresar procedimientos, de manera que pudieran ser "comunicados" a la calculadora. Las respuestas de los estudiantes indican que el uso de paréntesis debe introducirse hasta que se inicia el estudio del álgebra; antes de esto los estudiantes no parecen dar sentido a esos nuevos símbolos, a pesar de que su función pueda ejemplificarse aritméticamente. En lo que sigue tratamos de aclarar esto.

Nuestros estudiantes comprendieron la función de los paréntesis hasta que tuvieron necesidad de *usarlos*; esto es, cuando no sólo tenían que *leerlos* sino que era necesario que los emplearan como medios de expresión. Sus respuestas muestran que el uso de paréntesis sólo adquiere sentido cuando tienen que expresar algebraicamente un procedimiento. Parece ser que las nuevas reglas y procedimientos deben mostrar ser más eficaces que los que los alumnos previamente dominan, o bien, ser absolutamente necesarios. De otra manera se ven como imposiciones del maestro que el estudiante retiene por periodos relativamente cortos.

Si los términos involucrados son únicamente números, los alumnos no captan la necesidad de agruparlos, porque siempre pueden simplificar dos de ellos para obtener un solo número. El uso de paréntesis implica postergar la ejecución de algunas operaciones, por ejemplo, en el caso de expresiones como $(3 + A) \times 2$, esa postergación es obligada. El siguiente episodio se refiere a esta situación. Durante la fase de familiarización con el teclado de la calculadora, se explicó la función de los paréntesis y su relación con la prioridad de las operaciones. Después de esto los alumnos hicieron un buen número de actividades, y aparentemente lo habían entendido muy bien. No obstante, *ninguno* tuvo presente esa experiencia cuando más adelante se vio en la necesidad de utilizar los paréntesis.

Cuando los estudiantes operan por cuenta propia no les parece necesario agrupar términos; por ejemplo, se les pidió que calcularan el perímetro de un rectángulo de dimensiones 5 cm y 8 cm, y que mostraran mediante *una sola expresión* cómo lo habían hecho. *Todos* expresaron su procedimiento como $5 + 8 \times 2$, sin embargo obtenían la respuesta correcta, 26 cm. Es claro que razonaban y operaban correctamente; el problema está en la manera en que expresaron su procedimiento. La prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis no parecen tener sentido para ellos a pesar de tener información al respecto, pues sus procedimientos aritméticos no los conducen a ningún resultado que los cuestionen. Para corroborar esto se les propuso la siguiente situación: "Un alumno de otra escuela calculó el perímetro de ese rectángulo efectuando las operaciones $2 \times 5 + 8$" y se les pidió que opinaran acerca de eso. Los alumnos afirmaron que era correcto, porque "como ya sabes de que se trata, primero sumas 5 + 8, 13, y luego multiplicas 13 por 2". Para tratar de contrarrestar esto se les pidió que lo hicieran empleando la calculadora, al hacerlo observaron que algo andaba mal y recordaron que deberían usar paréntesis. Sin embargo, esta experiencia no pareció ser relevante; al parecer el uso de paréntesis era un recurso muy sofisticado, ya que finalmente ellos sabían como arreglárselas sin ellos. Este es el punto sobre que queremos enfatizar; trataremos de precisar nuestras observaciones mediante los episodios que analizamos a continuación.

La necesidad real del uso de paréntesis se presentó por primera vez cuando los estudiantes estaban inventando patrones numéricos para que un compañero encontrara un programa que los reprodujera (Formato 2). Dada la naturaleza de la actividad, se esperaba que los alumnos tratarían de proponer patrones numéricos complicados, lo cual se estimuló, pero se les pidió que la complejidad de los problemas que propusieran no se basara en que la tablas contuvieran números muy grandes o fracciones complicadas. Entonces, al querer inventar patrones numéricos difíciles de encontrar empezaron a crear expresiones con una *esructura* distinta. Por ejemplo, en esas sesiones varios estudiantes hicieron preguntas como la de Jimena: "Quiero que la calculadora primero sume 1 y luego multiplique por 2. Yo hice el programa $A + 1 \times 2$, pero no hace lo que yo quiero, sólo suma 2, ¿por qué?"

A partir de situaciones como la anterior, esos estudiantes se percataron de la necesidad de considerar la prioridad de las operaciones y de usar paréntesis para modificar el orden preestablecido. La posibilidad de emplear expresiones distintas resultó muy motivante para los alumnos; poco después se había divulgado esta información y la mayor parte del grupo también estaba empleando expresiones que contenían paréntesis. Posteriormente, cuando se trabajó en la inversión de programas, se notó que *no mencionaban* el uso de paréntesis en las expresiones que aplicaban para explicar lo que habían hecho, aunque en sus hojas de trabajo sí lo habían realizado. Se les preguntó por qué procedían de esa manera. El siguiente episodio con Jenny (estrato medio) caracteriza las respuestas que se obtuvieron: "Yo no pienso como la calculadora ... tú tampoco lo haces ... tú puedes entenderme ... Si yo quiero que la calculadora me entienda debo usar paréntesis, de otra manera hace un desastre". Entonces se le preguntó cómo le haría si uno no la pudiera atender en este momento y tuviera que dejar un mensaje. "En ese caso usaría los paréntesis ... bueno, también podría decirte que primero hicieras una cosa y luego la otra ... pero eso sería muy trabajoso ... mejor con paréntesis".

Más aún, se obtuvo evidencia que indica que en la medida en que los alumnos adquirieron un conocimiento más sólido respecto del lenguaje de la calculadora como un sistema codificado de representación, llegaron a operar no sólo sobre eventos concretos, sino con combinaciones derivadas de operaciones sobre el lenguaje mismo. Lo que sigue ilustra esto. Diego (estrato medio), al invertir el programa $A \times 2\text{-}1$, elaboró dos programas: $\mathbf{A \div 2 + 0.5}$ **y** $\mathbf{(A + 1) \div 2}$. Cuando se le preguntó por qué, contestó:

> **"Encontré el programa $A \div 2 + 0.5$ porque sabía que era necesario dividir entre 2, y luego hice el programa $A \div 2$; cuando lo corrí vi que siempre me faltaba 0.5 ... Entonces lo ajusté sumándole 0.5. Luego quería invertir el programa $A \times 3\text{-}2$ ... era muy difícil ajustarlo como había hecho con el otro (el dividir entre 3 el desarrollo o expansión decimal le dificultaba "el ajuste"). Noté que usando paréntesis podía *irme de regreso* usando los mismos números que tenía en el primer programa (el original) ... creo que eso está mejor ... así no tengo que ajustar nada". Después de decir esto mostró con satisfacción el programa $(A + 2) \div 3$.**

De ahí en adelante usó paréntesis para enfrentar ese tipo de situaciones, aunque con frecuencia los usaba cuando no era necesario. Nuestras observaciones señalan que, para el estudiante, la calculadora desempeñó el papel de un interlocutor que requiere de la formalidad del uso de convenciones sintácticas para producir los resultados que él esperaba obtener. Tal tipo de interacción fue el que llevó a nuestros estudiantes más allá de ser lectores competentes de expresiones que contienen paréntesis, ubicándolos en un nivel más alto, el de usuarios aptos de esos símbolos como instrumentos de su pensamiento.

Manipulación simbólica

Todas las actividades que se realizaron estuvieron basadas en la noción de función y, por ende, en el uso de las letras como variables. El trabajo con la calculadora orientado de esa manera permitió abordar la manipulación simbólica en el contexto de las transformaciones; con esto queremos decir efectuar operaciones sobre una expresión con el fin de obtener *otra expresión dada*. La investigación proporcionó evidencias que muestran que al introducir la manipulación sobre expresiones simbólicas a partir de la noción de variable, se propicia que los estudiantes desarrollen sus propias reglas para operar y, además, como consecuencia de esto, que cuenten con elementos para verificar la validez de esas reglas.

Debemos hacer notar que para llevar a nuestros estudiantes a operar con expresiones algebraicas fue necesario que modificaran la noción que habían desarrollado acerca de las letras que usaban en un programa (las de variable), ya que para simplificar una expresión algebraica se requiere manejar las literales como *objetos* que pueden agruparse y contarse (indeterminadas en el sentido de Freudenthal, 1983). En lo que sigue describiremos cómo se dio esa modificación, y posteriormente discutiremos el papel que desempeñó la prioridad de las operaciones en el proceso de simplificación de expresiones algebraicas con más de dos términos, lo cual permitió que extendieran sus reglas para llegar a operar exclusivamente sobre los coeficientes.

La factibilidad de operar sobre expresiones algebraicas se introdujo durante la tercera entrevista. Diego quería teclear el programa A × 4, sin darse cuenta tecleó A × 3, entonces se le pidió que corrigiera, pero sin que borrara nada de lo que había escrito. En realidad nuestra petición le sorprendió; de hecho se le estaba pidiendo algo completamente distinto a cualquier cosa que hubiera hecho antes. En su primer intento tecleó A × 3 + 1. Esto nos hizo pensar que estaba cometiendo el error de sumar 1 a 3 para obtener 4, pasando por alto la prioridad de las operaciones. Sin embargo veremos que ése no era el caso.

Diego corrió su programa y verificó que "sólo funcionaba para A = 1" (quería decir, $3A + 1 = 4A$, para $A = 1$). "Si en lugar de 1 le pongo 2, sólo funcionará para el 2 (es decir, $3A + 2 = 4A$, para $A = 2$); si le pongo 3, sólo funciona para el 3 ...". Eso no era lo que él quería y unos momentos después dijo tímidamente "quizás es $A \times 3 + A$". Corrió el programa para verificar si funcionaba. Cuando se le preguntó por qué había dudado que $A \times 3 + A$ fuera la expresión que buscaba contestó: "Creí que no se podía escribir algo así ... que al usar dos veces la letra la calculadora no lo entendería" (era la primera vez que se le presentaba tal situación). "Yo tenía $3 \times A$ ... eso cambia cada vez que le pongo un número ... Necesitaba sumarle un número para que diera lo mismo que 4 × A ... pero ese número tenía que cambiar cada vez también ... Entonces tenía que sumar otra vez A". A esa pregunta le siguieron otras en las que se aumentaba gradualmente la dificultad, culminando con cuestiones relacionadas con el proceso inverso: simplificar una expresión hasta de cinco términos, no todos semejantes.

Tiempo después, Diego mostró orgullosamente algunos programas que había hecho "más cortos". A manera de ejemplo mencionamos uno de ellos, que deja ver hasta dónde extendió la experiencia que tuvo durante la entrevista, en la que "completó" 3 × A para obtener $4 \times A$. Nos mostró el programa $A \times 10001 + B \times 1010 + C \times 100$ como una forma "más corta" de $A \times 10000 + B \times 1000 + C \times 100 + B$x $10 + A$, el cual había elaborado para producir números palindromos de cinco dígitos.

Esta pregunta se planteó a los ocho niños que entrevistamos. Seis la enfrentaron de modo similar a Diego, y sólo Raúl (estrato medio) utilizó una estrategia parte-todo, considerando que "A es una décima parte de $10 \times A$" (se le pedía corregir $9 \times A$ para obtener $10 \times A$). Sin embargo, ante expresiones que contenían más de dos términos, no fue capaz de aplicar su regla ni de reconocer que podía hacerlo, y acudió a sustituir la variable por valores específicos.

Estos datos muestran que la experiencia que tuvieron los estudiantes en cuestión relacionando tablas de valores con expresiones algebraicas, les proporcionó elementos para:

- Darle sentido a la pregunta que se les planteaba.
- Desarrollar una estrategia para abordarla.
- Producir sus propias reglas para simplificar expresiones.

Además, y quizá lo más importante, al ser ellos los que producen las reglas, generan a la vez recursos para verificarlas. El siguiente extracto de la cuarta entrevista con la alumna Erandi (estrato medio) documenta con claridad esto. A fin de obtener información tan confiable como fuera posible, la transformación de expresiones sólo se abordó durante sesiones de entrevista. En la tercera entrevista Erandi enfrentó exitosamente la transformación de expresiones, e incluso empezó a generar sus propias reglas, por lo que en la cuarta entrevista se abordó nuevamente esta situación para observar qué había ocurrido con tal aprendizaje; en particular, planteándole situaciones que antes no había enfrentado (**P**: profesor; **E**: Erandi).

P: Voy a escribir un programa: $3 \times A + 2 \times A + 5 \times A$ (SE ESCRIBE EN LA HOJA DE PAPEL). ¿Lo podríamos reducir un poco?

E: Es que es ... más ... $A \times 3 + 10$

P: A ver, ¿lo escribes en la calculadora?

E: $? \to A$: $3 \times A + 2 \times A + 5 \times$ A
$? \to A$: $A \times 3 + 10$

P: Pero, a ver, dime cómo encontraste esto, tú dijiste $A \times 3 + 10$, ¿cómo lo encontraste?

E: Es que conté las A, son tres, y luego sumé esto: 3 + 2 + 5 ... Pero no da, entonces es ... ¡Ah, ya sé! Es A × 10 y ya ... (LO TECLEA Y LO CORRE) ... ahora si da

P: Y ese A × 10, ¿cómo se te ocurrió?

E: Porque se estaba multiplicando y .. ya ... lo demás ... (DICE COSAS ININTELIGIBLES)

P: A ver, a ver, ya encontraste la respuesta, ahora cómo la explicamos

E: Que la calculadora primero multiplica $3 \times A$, $2 \times A$ y $5 \times A$, y luego lo suma, y si yo sumo el 5 el 2 y el 3 me va a dar 10 y eso es lo que va a multiplicar, ya no tengo que sumarlo ni nada ... es que está muy enredado, pero así es ... Al principio pensé $3 \times A + 10$ y eso por A y así ..

P: Y si en lugar de este programa pusiéramos $2 \times B + 7 \times B + 4$, ¿ése lo podríamos hacer más breve?

E: $9 \times B + 4$

P: A esta misma pregunta una de tus compañeras me dijo que eso le daba $13 \times B$

E: No, por que si fuera así sería lo mismo que aquí (señala $9 \times B$), pero aquí (SEÑALA EL 4) *no tiene* para volverlo a multiplicar

Podemos observar que Erandi generó una regla incorrecta, para la cual incluso tenía una explicación; sin embargo, ella contaba con un criterio para evaluar su respuesta;

su programa debería ser equivalente al programa dado. Aquí debemos destacar un par de puntos:

- Erandi verificó la equivalencia entre sus programas a partir de comparar su valor numérico para un mismo valor de la variable. Desechó su primer intento a partir de un solo valor porque "si su programa fuera el correcto debería funcionar para cualquier valor". Guardadas las proporciones, este criterio corresponde a la definición de equivalencia entre funciones.
- Erandi encontró un programa equivalente "más corto" a partir de que observó que $3 \times A + 2 \times A + 5 \times A = 20$, para $A = 2$. Una vez que vio esto, fue su manejo de la prioridad de las operaciones lo que le permitió explicarse lo que hacía la calculadora; "la calculadora primero multiplica $3 \times A$, $2 \times A$ y $5 \times A$, y luego suma". Debemos notar que sin estos elementos, ella no habría podido separar los términos de la expresión, ya que se estaba guiando por el cálculo del valor obtenido (20) para $A = 2$. Finalmente, su respuesta a la última pregunta muestra claramente que puede distinguir los términos semejantes en una expresión.

Semántica

Noción de variable y generalización

Debido a la naturaleza de las actividades propuestas la noción de variable estuvo presente siempre. Los alumnos mostraron desde el inicio del estudio que habían entendido que una letra sirve para representar "cualquier número", o que la elección de la letra con la que van a elaborar un programa no afecta el modo en que éste funciona. El siguiente episodio ilustra esto. En la segunda entrevista nos interesaba observar qué habían entendido los alumnos respecto del uso de paréntesis. A Erandi se le preguntó si podía hacer un programa que sumara 2 y luego multiplicara por 3. Ella escribió de inmediato $(B + 2) \times 3$, y lo corrió para $B = 5$. Obtuvo como resultado 21 y dijo: "ya está". Entonces se le preguntó si no necesitaba correrlo con otros valores para verificar que funcionaría correctamente en todos los casos. Ella dijo: "No, así está bien, porque la B representa cualquier número ... cualquier número que te puedas imaginar ... eso hace que el programa siempre haga lo mismo ... el número más 2 y eso por 3 ... si tú cambias el número (el valor de la variable) cambia el resultado, pero no cambia el programa". El episodio muestra claramente que la noción que Erandi desarrolló para las letras es la de variable, y para un programa, la de función. Además su respuesta hace evidente que ha comprendido que un programa es una expresión general. Cuando corrió el programa, para $B = 5$ sólo estaba verificando la corrección del procedimiento, no la generalidad del programa. Su razonamiento deja claro este punto; el intervalo de generalidad de la expresión que construyó está dado por la generalidad del simbolismo que está empleando.

Pragmática

Las preguntas que se describen a continuación se plantearon en la cuarta entrevista, y tienen como propósito obtener información sobre la medida en que los estudiantes podían extender su experiencia en el uso del lenguaje de la calculadora, a nuevos usos de ese código. Lo que en tales preguntas se plantea no está relacionado, o no lo está explícitamente, con relaciones numéricas presentadas mediante una tabla, por lo que el único recurso que los estudiantes podían aplicar para enfrentarlas son los significados que hayan asociado a las letras, y las nociones que desarrollaron sobre las expresiones algebraicas como medios de cómputo.

1. ¿Qué piensas acerca de esto? Un niño de otro grupo dice que:
   a) $A^2 + B^2 = (A+B)^2$
   b) Cada vez que suma dos números consecutivos obtiene un número impar.
2. Observa esta lista de números: 5, 9, 13, 17; si continuara escribiendo números en esa lista y no me equivocara, ¿tendría que escribir el 877?
3. Piensa en un número que esté entre 1 y 10. Súmaselo a 10 y escribe el resultado. Ahora réstale a 10 el número que pensaste y escribe el resultado. Suma los dos resultados que escribiste, ¿puedo adivinar el resultado final que obtuviste? ... Es 20. ¿Puedes explicar cuál es el truco que estoy usando para adivinar el resultado?

Respuestas obtenidas

Pregunta 1a. No obstante que la expresión $A^2 + B^2 = (A + B)^2$ era totalmente nueva para ellos, los ocho niños entrevistados pudieron interpretarla sin ninguna dificultad aparente. Ninguno aventuró su respuesta sin antes sustituir las variables por valores numéricos. Todos concluyeron que la afirmación $A^2 + B^2 = (A + B)^2$ no es verdadera. Aquí cabe destacar que Wheeler y Lee (1989), al aplicar la misma pregunta a 350 estudiantes del primer año de bachillerato, encontraron que sólo uno recurrió a elegir un valor específico para buscar un contraejemplo.

Pregunta 1b. Los ocho niños razonaron en términos de ejemplos numéricos. Cuando se les mostró que su argumento no era suficiente, seis acudieron a construir un programa (como B + B + 1). Dos de ellos recurrieron a la expresión del programa para dar una explicación. Por ejemplo, Jimena (nivel alto) dio el siguiente argumento: "Ve, B + B da siempre un número par ... no importa que número sea B ... si a eso le sumas 1, entonces siempre da un número non".

Pregunta 2 Sólo cuatro de los ocho niños pudieron responder esta pregunta. Lo hicieron programando la calculadora. Jennifer primero encontró el patrón numérico calculando mentalmente: "Noté que al 5 ÷ 4, 9 ÷ 4 y 13 ÷ 4 siempre sobra 1 ... luego hice 877 ÷ 4 y también sobró 1 ... entonces 877 tenía que estar en esa lista". Erandi hizo dos programas: "A × 4 + 1 para continuar escribiendo números en la lista" y "(A-1) ÷ 4 para encontrar el lugar que el 877 ocupa en la lista".

Pregunta 3 Los ocho niños encontraron "el truco para adivinar" el resultado. Cuatro (entre los cuáles está una niña del nivel bajo) hicieron un programa para fundamentar su hallazgo; por ejemplo, la respuesta de Rocío (nivel bajo) fue la siguiente: "No estás sumando nada ... Mira, $A + 10 + 10 - A$ (señalando A y menos A) ... por eso da siempre 20".

Comentarios finales

La investigación proporcionó resultados promisorios en cuanto a la potencialidad de las calculadoras como un medio de apoyo en el proceso de aprendizaje del álgebra. Sin embargo, hay algunos aspectos que deben estudiarse cuidadosamente; entre ellos destacaremos los siguientes.

- Las actividades que se propusieron y la novedad de usar las calculadoras en la clase mostraron ser suficientemente motivadoras. No obstante, resultó que el éxito del estudiante depende fuertemente de su acervo aritmético. A pesar del apoyo que brinda la calculadora para efectuar cálculos, los niños con poca destreza aritmética tuvieron dificultades para enfrentar las actividades. Probablemente estos niños requieran más tiempo para alcanzar el nivel que mostró el resto del grupo.
- Los resultados que se obtuvieron fortalecen la hipótesis de que la introducción al álgebra mediante el uso del código algebraico, propicia que los estudiantes generen significados que les permiten emplearlo para expresar generalizaciones y enfrentar la resolución de problemas. A este respecto cabe destacar que las preguntas 1a.,[7] 1b. y 3 (cuarta entrevista) fueron planteadas por Wheeler (1989) a estudiantes del décimo grado.[8] El propósito de Wheeler era observar si los estudiantes acudían a la aritmética para dar respuesta a cuestiones relacionadas con el álgebra, y si acudían al álgebra para abordar generalizaciones sobre relaciones numéricas. Wheeler reporta que en el caso de la pregunta 1a., sólo 10 de 352 estudiantes la enfrentaron acudiendo a un ejemplo numérico, y de ellos sólo uno lo hizo para dar un contraejemplo; los otros nueve lo efectuaron para argumentar en favor de una respuesta incorrecta. Para la pregunta sobre números consecutivos, 78 de 118 estudiantes no acudieron al álgebra para dar una respuesta, y sólo el 25% de los estudiantes recurrió al álgebra para contestar la pregunta 3. Es importante señalar el fuerte contraste que presentan nuestros resultados con los que reporta Wheeler, porque muy probablemente las respuestas de los estudiantes están relacionads con un estilo de enseñanza, y ese es precisamente el asunto que se ha abordado.
- Parece interesante observar más adelante al grupo escolar con el que trabajamos, a fin de indagar en cuestiones relacionadas con la disociación entre aritmética y álgebra que reporta Wheeler (1989), así como las posibles implicaciones que puedan surgir de una estrategia de enseñanza como ésta. Al respecto cabe mencionar que actualmente se está llevando a cabo una réplica de este estudio en tres planteles de secundaria,[9] donde las circunstancias en que se realiza corresponden al ambiente regular en que se desarrolla un curso de matemáticas en la escuela. Los profesores de los grupos experimentales son docentes de tiempo completo, con grupos de 35 a 40 alumnos. Seguramente los resultados que se obtengan de esta etapa de la investigación arrojarán información crucial respecto de la potencial edad del uso de las calculadoras en el salón de clases.

---

7 La pregunta que usó Wheeler fue $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$. Consideramos pertinente la comparación que hacemos dada la diferencia de edades y de escolaridad entre sus estudiantes y los nuestros.

8 El equivalente en nuestro sistema escolar sería el primer año del bachillerato.

9 Las escuelas secundarias dirunas No. 18 y No. 77 en el Distrito Federal (Cd. de México) y la Escuela Celestín Freinet, en Jalapa, Veracruz (proyecto apoyado por el CONCACYT).

Bibliografía

BRUNER, J. (1982). *The formats of language acquisition*. American Journal of Semiotics, Vol. 1, No. 3, 1-16.

BRUNER, J. (1983). *Child's Talk: Learning to use a language*. W.W. Norton & Company. New York-London.

CEDILLO T. (1992). *Exploring the learning of algebra under the paradigm of communication*. R. Sutherland (ed.), Working Group Algebraic Processes and Structure. XVI International PME Conference. USA, 1992.

CEDILLO, T. (1994). *Introducing algebra with programmable calculators*. PME-NA XVI, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, USA.

FRUEDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

LEE, L., WHEELER, D. (1989). *The arithmetic connection*. Educational Studies in Mathematics, 20, 41-54.

MASSIMO PIATELLI-PALMARINI (eds), (1980). *Language and learning: The debate between Jean Piaget and Noam Chomsky*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts [traducción al inglés de la edición francesa *Théories du langage, théories de l'apprentissage*, Editions du Seuil, (1979)].

ROJANO, T., SUTHERLAND, R. (1993). *Towards an algebraic approach: The role of spreadsheets*. XVII International PME Conference, Japan.

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press, London, England.

VYGOTSKY, L. (1986). *Thought and language*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

WERTSCH, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action*. Harvester Wheatsheaf, USA.